

УДК 621.38

DOI <https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.3.2>

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДИКИ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЕЛЕКТРИЧНОЇ СХЕМИ П'ЄЗОРЕЗОНАТОРА НА ОСНОВІ МОДЕЛІ BUTTERWORTH – VAN DYKE

Васильчук Д. П. – старший викладач кафедри електромеханічних та комп'ютерних систем

Навчально-наукового професійно-педагогічного інституту

Української інженерно-педагогічної академії

ORCID ID: 0000-0002-7856-2252

Залужна Г. В. – кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри електромеханічних та комп'ютерних систем

Навчально-наукового професійно-педагогічного інституту

Української інженерно-педагогічної академії

ORCID ID: 0000-0003-4810-9737

Романуша В. О. – кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри електромеханічних та комп'ютерних систем

Навчально-наукового професійно-педагогічного інституту

Української інженерно-педагогічної академії

ORCID ID: 0000-0002-8009-9455

У статті досліджуються методики визначення параметрів еквівалентної електричної схеми (ЕЕС) п'єзоелектричних резонаторів і перетворювачів на основі моделей Butterworth – Van Dyke (BVD) і Sherrita.

Отримано аналітичні вирази для оцінки відносної похибки розрахунку резонансної частоти коливань п'єзоелемента, виходячи з параметрів ЕЕС для моделей BVD і Sherrita, для різних випадків граничних умов (ГУ), а саме нульових ГУ і ГУ з однобічним масонавантаженням і міжелектродним проміжком.

Представлено результати чисельного аналізу визначення відносної похибки резонансної частоти, виходячи з параметрів ЕЕС для моделей BVD і Sherrita, побудовано графіки частотних характеристик для випадку АТ зрізу кварцу на резонансну частоту $f_s = 10$ МГц. Ці результати і графіки показують, що найбільші поширені методики, що засновані на моделі BVD, мають значну абсолютну і відносну похибки визначення резонансної частоти f_s .

Встановлено, що методика, заснована на моделі Sherrita, має нульову відносну погрішність визначення резонансної частоти, виходячи з ЕЕС. Крім цього, ця методика може бути застосована і для визначення ЕЕС п'єзореzonаторів з ненульовими граничними умовами, при цьому виключається поява вище вказаних похибок.

Запропоновано модифікацію методики визначення параметрів ЕЕС на основі моделі BVD, в якій усунуто вище приведені недоліки, тобто отримано подальший розвиток моделі BVD. Отримано аналітичні вирази для розрахунку параметрів ЕЕС модифікованої методики, які, на відміну від існуючих методик, враховують залежність L_n і C_0 від гармонік n .

Модифікована методика визначення параметрів ЕЕС може бути використана при моделюванні і проектуванні нових резонаторів, фільтрів, датчиків в пристроях контролю зв'язку, контрольно-вимірювальних приладах та в інших п'єзореzonансних коливальних системах.

Ключові слова: кварцовий резонатор, товщинно-зсувні коливання, п'єзоелемент, АТ-зріз кварцу, еквівалентна електрична схема.

Vasylychuk D. P., Zaluzhna G. V., Romanusha V. O. Modification of the methodology of determination of parameters of equivalent electrical scheme of piezoresonator on the basis of model Butterworth – Van Dyke

The article investigates the methodologies of determining the parameters of the equivalent electrical circuit (EES) of piezoelectric resonators and transducers based on models Butterworth – Van Dyke (BVD) and Sherrita.

Analytical expressions for estimating the relative error in calculating the resonant frequency of piezoelectric oscillations based on the EES parameters for models are obtained BVD and Sherrita, for different cases of boundary conditions (GU), namely zero GU and GU with unilateral mass load and interelectrode interval.

The results of numerical analysis to determine the relative error of the resonant frequency based on the parameters of the EPS for the models are presented BVD and Sherrita, graphs of frequency characteristics for the case of AT quartz cut at resonant frequency are constructed $f = 10$ Мгц. These results and graphs show that the most common techniques are model-based BVD, have significant absolute and relative errors in determining the resonant frequency f_s .

It is established that the methodology based on the Sherrita model has zero relative error in determining the resonant frequency based on the EES. In addition, this technique can be used to determine the EES of piezoresonators with non-zero boundary conditions, thus eliminating the occurrence of the above errors.

A modification of the methodology of determining the parameters of the EES based on the BVD model is proposed, which eliminates the above shortcomings, ie the further development of the BVD model is obtained. Analytical expressions for calculation of EES parameters of the modified technique are obtained, which, in contrast to the existing methodologies, take into account the dependence L_n and C_n on harmonics n .

The modified methodology of determination of parameters of EEC can be used for a design and planning of new resonators, filters, sensors in the devices of control of connection, control and measuring devices and in other piezo resonant oscillating systems.

Key words: quartz resonator, thickness-shear oscillations, piezoelectric element, AT-slice of quartz, equivalent electrical circuit.

Постановка проблеми. Опис п'єзоелектричних перетворювачів і п'єзореzonatorів за допомогою еквівалентних електричних схем (ЕЕС) є ефективним способом вирішення більшості практичних завдань, пов'язаних із схемотехнічним проектуванням і моделюванням.

Наразі такі схеми були отримані для ряду п'єзореzonatorів простої геометрії, причому при дослідженні поведінки резонатора в широкій смузі частот використовуються багатоконтурні еквівалентні схеми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для отримання ЕЕС п'єзоелектричних пластин і дисків, які працюють на товщинно-зсувних (TSh) типах коливань, найбільше поширення отримала модель Butterworth – Van Dyke (BVD), що представлена на рисунку 1. Van Dyke був першим, хто запропонував цю модель, а пізніше розширив її за рахунок включення декількох паралельних $R_n L_n C_n$ контурів (рис. 2) для обліку резонансів на вищих гармоніках. Ця модель рекомендована IEEE в якості стандартної [1, 2].

Значення величин $R_n L_n C_n$ в послідовній гілці асоціюють відповідно з розсіянням теплової енергії під час коливань, масою п'єзоелемента (ПЕ) і константами пружності. Ємність C_0 паралельної гілки асоціюють з електростатичною ємністю ПЕ пластини, де ПЕ виступає діелектриком. Модель BVD з достатньою для практики точністю описує поведінку п'єзореzonatorа в області частот, які знаходяться поблизу резонансу, за її межами п'єзореzonator поводить себе як звичайний конденсатор.

Методика визначення параметрів ЕЕС по моделі BVD для випадку нульових граничних умов (відсутнє масонавантаження і міжелектродний проміжок) приведена в роботі [3].

У роботі [4] на основі моделі BVD була отримана ЕЕС п'єзореzonatorа, що враховує граничні умови (ГУ) на головних поверхнях ПЕ. В якості ГУ в цій роботі

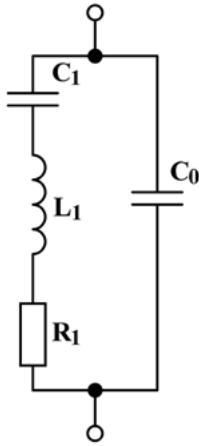


Рис. 1. Модель BVD

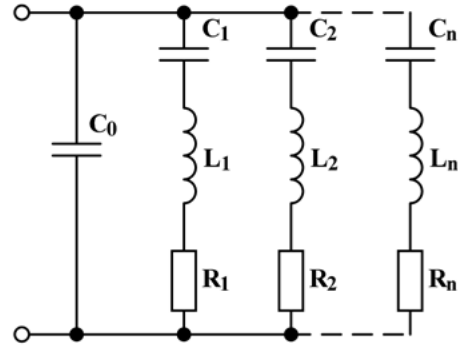
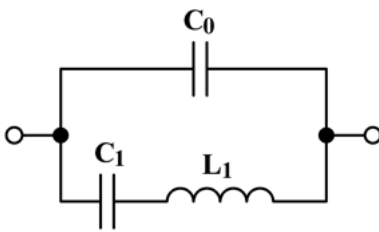


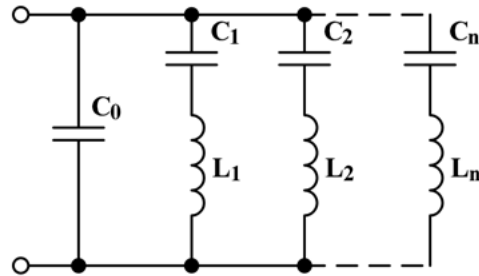
Рис. 2. Розширена модель BVD

використовувалися одностороннє масонавантаження на одній із сторін п'єзоелемента і проміжок d_0 між електродом та іншою стороною п'єзоелемента. Отримані в роботі вирази для параметрів L_n, C_n, R_n ЕЕС є загальними і можуть бути використані при проектуванні п'єзорезонансних пристроїв з поліпшеними параметрами.

Іншими авторами [5] в якості ЕЕС п'єзорезонатора була запропонована модифікація моделі BVD. Схема запропонованої ними ЕЕС представлена на рисунку 3.



а)



б)

Рис. 3. Модель Sherrita (а); розширена модель Sherrita (б)

У цій моделі відсутній активний опір R_n у послідовній вітці. Облік дисипативних втрат пропонується здійснювати за рахунок представлення матеріальних констант п'єзоматеріала в комплексній формі, та, як наслідок, усі елементи схеми на рисунку 3 будуть комплексними, у тому числі і частоти послідовного f_s і паралельного f_p резонансів. Комплексні матеріальні константи визначаються дослідним шляхом за допомогою аналізатора імпедансу з подальшою обробкою результатів ітераційним методом Сміта [6]. У роботі [7] отримала подальший розвиток модель Sherrita, яка була розширена за рахунок додавання додаткових L_n, C_n гілок для урахування резонансу на вищих гармоніках аналогічно тому, як була отримана розширена модель BVD, що представлена на рисунку 2. Автори робіт стверджують, що їх метод дозволяє точніше визначати параметри ЕЕС п'єзорезонатора і приводять відповідні результати розрахунку.

Мета дослідження – аналіз методик отримання параметрів ЕЕС на підставі моделей, про які йшла мова вище [5-7], оцінки їх абсолютної і відносної похибок при визначенні частоти послідовного резонансу f_s , вибір оптимальної методики.

Виклад основного матеріалу. Пластини різних зрізів кварцу мають різні електропружні матриці матеріальних констант. Один з класів зрізу кварцу, повернений Y-зріз, отримав найбільше поширення при конструюванні п'єзоелектричних пристроїв. Система рівнянь стану, руху і електростатики поверненого Y-зрізу кварцу для випадку чистих TSh коливань, коли використовується тільки одна компонента механічного зсуву $u_1(x_2, t) \neq 0$, а інші $u_2(x_2, t) = u_3(x_2, t) = 0$, згідно [8], наступна:

$$\begin{cases} T_{21} = C_{66} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + e_{26} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ T_{31} = C_{56} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + e_{25} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ D_2 = e_{26} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \varepsilon_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ D_3 = e_{36} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \varepsilon_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{cases}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0, \end{cases}, \quad (2)$$

де x_2 – напрям уздовж товщини ПЕ;

$c_{ij}, e_{kij}, \varepsilon_{kij}$ – пружні, п'єзоелектричні і діелектричні постійні ПЕ;

ρ, D_i, U_j, φ – щільність п'єзоелемента, електричний і механічний зсув уздовж координатних осей і електричний потенціал відповідно;

T_{ij} – елементи тензора механічної напруги.

Індекси набувають значень $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Загальне розв'язання системи рівнянь (1) і (2) відносно φ, u_1 згідно [2]:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{e_{26}}{\varepsilon_{22}} [A_1 \sin(\xi x_2) + A_2 \cos(\xi x_2)] + B_1 x_2 + B_2 \\ u_1 = A_1 \sin(\xi x_2) + A_2 \cos(\xi x_2) \end{cases}, \quad (3)$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 – безрозмірні константи, які необхідно визначити виходячи з граничних умов;

$\xi = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\bar{c}_{66}}}$ – хвильове число;

$\bar{c}_{66} = c_{66}(1 + k_{26}^2)$ – модифікована константа пружності;

$k_{26}^2 = \frac{e_{26}^2}{\varepsilon_{22} c_{66}}$ – коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Приймаємо наступні граничні умови на головних поверхнях п'єзоелектричної пластини:

$$\begin{aligned} T_{21}(x_2 = h) = T_{21}(x_2 = -h) = 0 \\ \varphi(x_2 = h) = \varphi_0 \\ \varphi(x_2 = -h) = -\varphi_0 \end{aligned}, \quad (4)$$

Розв'язання системи рівнянь (3) з урахуванням граничних умов (4) буде наступним:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{e_{26}\varepsilon_{22}\varphi_0}{e_{26}^2 \sin(\xi h) - h\xi\varepsilon_{22}\bar{c}_{66} \cos(\xi h)}, \\ B_1 &= \frac{\xi\varepsilon_{22}\bar{c}_{66} \cos(\xi h)\varphi_0}{-e_{26}^2 \sin(\xi h) + h\xi\varepsilon_{22}\bar{c}_{66} \cos(\xi h)}, \\ A_2 &= 0, B_2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Згідно [8], повну провідність п'єзорезонатора можна визначити з рівняння:

$$Y_r = \frac{I}{U} = \frac{1}{U} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-m}^m \int_{-l}^l D_2(x_2, t) dx_1 dx_3. \quad (6)$$

Враховуючи те, що електричне зміщення $D_2(x_2, t)$ є гармонійною функцією часу $D_2(x_2, t) = D_2(x_2)e^{j\omega t}$, повну провідність п'єзоелемента можна записати у вигляді:

$$Y_r = \frac{j\omega S}{U} D_2(x_2), \quad (7)$$

де $S = 4ml$ – площа електроду.

Підставляючи (5) і (3) у вираз для $D_2(x_2, t)$ системи рівнянь (1), отримуємо наступний вираз для провідності Y_r :

$$Y_r = \frac{j\omega S \varepsilon_{22}}{2h} \left[\frac{1}{1 - \bar{k}_{26}^2 \frac{\tan(\xi h)}{\xi h}} \right], \quad (8)$$

де $\bar{k}_{26}^2 = \frac{k_{26}^2}{1 + k_{26}^2}$ – модифікований коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

1. Аналіз еквівалентної електричної схеми пьезорезонатора на основі моделі BVD з нульовими граничними умовами.

Згідно методики, викладеної в роботі [5] (надалі методика № 1), виходячи з провідності (8), були отримані наступні вирази для розрахунку параметрів ЕЕС :

$$L_n = \frac{h^3 \rho}{S e_{26}^2}, \quad (9)$$

$$C_n = \frac{4S e_{26}^2}{n^2 \pi^2 h \bar{c}_{66}}, \quad (10)$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_{22} S}{2h}, \quad (11)$$

$$R_n = \frac{n^2 \pi^2 h}{2S e_{26}^2} \eta_s, \quad (12)$$

де η_s – величина внутрішнього тертя, для кварцових резонаторів приймають рівною $0,3 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}$;

$n = 1, 3, 5, \dots$

Вираз для провідності еквівалентної електричної схеми, зображеної на рисунку 2, без урахування R_n буде наступним:

$$Y_{r1} = j\omega \left(C_0 + \frac{C_n}{1 - C_n \omega^2 L_n} \right). \quad (13)$$

Імпеданс Z_{r1} :

$$Z_{r1} = \frac{1}{Y_{r1}} = \frac{j(C_n L_n \omega^2 - 1)}{\omega(C_0 + C_n) - C_0 C_n L_n \omega^3}. \quad (14)$$

Після підстановки (9-11) в (13) отримаємо:

$$Y_{r1} = j\omega \frac{S}{2h} \left(\varepsilon_{22} + \frac{8e_{26}^2}{n^2 \pi^2 \bar{c}_{66} - 4h^2 \rho \omega^2} \right). \quad (15)$$

На рисунку 4 у якості прикладу приведені частотні характеристики, які побудовані згідно виразів (8) і (15) в області частот, наближених до резонансної $f_s = 10$ МГц з урахуванням того, що $n=1$ (досліджується резонанс на основній частоті). У якості ПЕ взятий АТ-зріз кварцу [9], завтовшки, що дорівнює $2h_{ПЭ} = nN / f_s = 1.1661 \cdot 10^3 / 10 \cdot 10^6 = 0,1661$, де N – частотний коефіцієнт. Площа електродів збудження, виходячи з умови $d/h > 30$, де d – найменший поперечний розмір пластини, прийнята $S = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$.

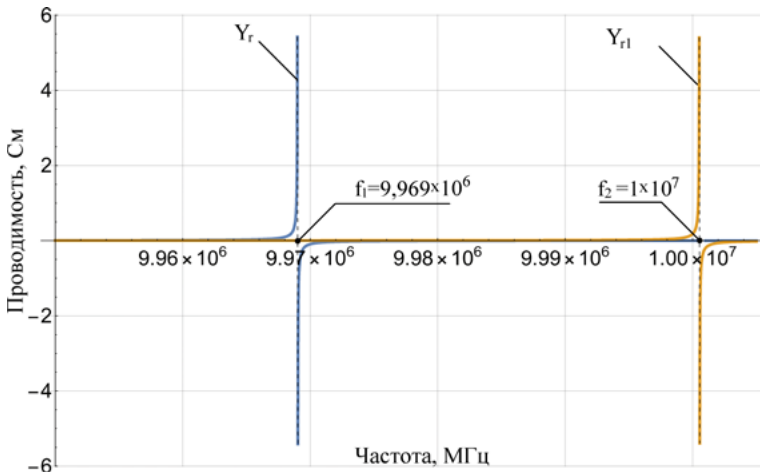


Рис. 4. Частотні характеристики $Y_r(\omega)$ і $Y_{r1}(\omega)$

Як можна бачити з графіків частотних характеристик, представлених на рис. 4, абсолютна похибка визначення резонансної частоти $\Delta f_s = f_2 - f_1$ за методикою № 1, складає $\Delta f_s = 31 \text{ кГц}$.

Визначимо аналітичний вираз для розрахунку відносної похибки $\Delta f / f_1 = \frac{f_2 - f_1}{f_1}$ методики № 1. Частота послідовного резонансу f_1 визначається згідно [5]:

$$f_1 = \frac{n}{4h} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}} \left(1 - 4 \frac{\bar{k}_{26}^2}{n^2 \pi^2} \right), \quad (16)$$

$$\text{де } f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}.$$

Вираз для тієї ж частоти послідовного резонансу, але вже отриманий виходячи з еквівалентної електричної схеми, зображеної на рисунку 3 з обліком (9) і (10), наступний:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_n C_n}} = \frac{1}{4 \sqrt{\frac{h^2 \rho}{n^2 \bar{c}_{66}}}}. \quad (17)$$

Вираз для визначення відносної похибки $\Delta f / f_{s1}$:

$$\Delta f / f_1 = \frac{4\bar{k}_{26}^2}{n^2\pi^2 - 4\bar{k}_{26}^2}. \quad (18)$$

Так, для п'єзореzonатора, що був використаний як приклад вище, при $n = 1$ відносна похибка складає $\Delta f / f_1 = 3,15 \cdot 10^{-3}$, а при $n = 3$ дорівнює $\Delta f / f_0 = 3,5 \cdot 10^{-4}$.

2. Аналіз еквівалентної електричної схеми п'єзореzonатора на основі моделі Sherrita з нульовими граничними умовами.

У роботі [7] представлена ЕЕС п'єзореzonатора, яка відмінна від загальноприйнятої схеми з моделі BVD, але запропонований авторами підхід визначення параметрів ЕЕС, є загальним, і його можна поширити на модель BVD.

Для розрахунку параметрів ЕЕС (методика № 2) у роботі [9] було запропоновано такі співвідношення:

$$L_n = \frac{1}{4\pi^2 f_s^2 C_1} \quad (19)$$

$$C_n = \frac{\varepsilon_{22} S / 2h}{1 - \bar{k}_{26}^2} \left(\frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2} \right) \quad (20)$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_{22} S / 2h}{1 - \bar{k}_{26}^2} - C_n. \quad (21)$$

Після підстановки (19-21) у (13), для випадку $n = 1$ отримаємо наступний вираз для визначення провідності Y_{r1}'' :

$$Y_{r1}'' = j\pi f \frac{S\varepsilon_{22}}{h(1 - \bar{k}_{26}^2)} \left[\frac{f_s^2 (f^2 - f_p^2)}{f_p^2 (f^2 - f_s^2)} \right], \quad (22)$$

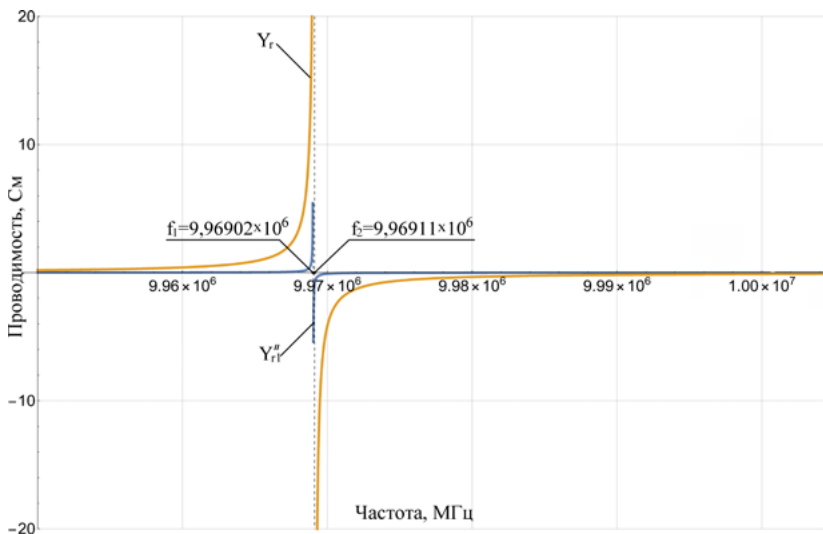


Рис. 5. Частотні характеристики $Y_r(\omega)$ і $Y_{r1}''(\omega)$

де $f_s = f_1 = \frac{n}{4h} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}} \left(1 - 4 \frac{\bar{k}_{26}^2}{n^2 \pi^2} \right)$ – частоти послідовного резонансу;

$f_p = \frac{n}{4h} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}}$ – частота паралельного резонансу.

На рисунку 5 наведено частотні характеристики, які побудовані згідно з виразами (8) та (22) у навколорезонансній області частот $f_s = 10^6$ МГц при $n = 1$. Геометрія та зріз ПЕ ті ж, що й у попередніх випадках. З графіків частотних характеристик видно, що абсолютна похибка визначення резонансної частоти становить $\Delta f_s = f_2 - f_1 = 90$ Гц.

Визначимо вираз для відносної похибки визначення резонансної частоти $\Delta f / f_1' = \frac{f_1 - f_2''}{f_1}$ методики № 3.

Вираз для резонансної частоти f_2'' , що отримане шляхом підстановки виразів (19) і (20) у (17), має наступний вигляд:

$$f_2'' = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_n C_n}} = \frac{n}{4h} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}} \left(1 - 4 \frac{\bar{k}_{26}^2}{n^2 \pi^2} \right) = f_1. \quad (23)$$

Отже, відносна похибка визначення резонансної частоти $\Delta f / f_1$ дорівнюватиме нулю.

Наявність абсолютної похибки $\Delta f_s = 90$ Гц і водночас відсутність відносної похибки $\Delta f / f_{s1} = 0$ пояснюється тим, що вираз для частоти послідовного резонансу f_s , що входить до (19) і (20), є наближенням. У зв'язку з цим цю похибку необхідно розуміти як похибку, з якою вираз (16) дозволяє визначити частоту послідовного резонансу.

4. Модифікація методики визначення параметрів еквівалентної електричної схеми п'єзорезонатора на основі моделі BVD з нульовими граничними умовами.

Відносна похибка визначення резонансної частоти Δf_s за методикою № 1 виникає через те, що при виведенні співвідношень для параметрів ЕЕС використовувався вираз для резонансної частоти $f_s = \frac{n}{4h} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}}$, який не враховує коефіцієнт електромеханічного зв'язку k_{26}^2 . Такий вибір був продиктований насамперед тим, що вираз для f_s є менш громіздким, ніж вираз для f_{s1} (формула 16). До того ж кількісне значення коефіцієнта електромеханічного зв'язку k_{26}^2 відносно мало (для АТ-зрізу кварца $k_{26}^2 = 0,008$) і для спрощення розрахунків їм часто нехтують. Як було показано вище, такі спрощення призводять до суттєвих похибок у визначенні резонансної частоти f_s , виходячи з ЕЕС резонатора.

У виразі для повної провідності ПЕ (8) проведемо заміну $\tan(\xi h) = 1 / \cot(\xi h)$, далі розкладемо функцію $\cot(\xi h)$ в ряд Тейлора у околі точки $(n = 1, 3, 5, \dots)$. Обмежуючись першими двома членами розкладання, отримаємо такий вираз для провідності Y_r :

$$Y_r = \frac{j\omega S \varepsilon_{22} \xi}{2h\xi - \frac{4k_{26}^2}{n\pi - 2h\xi}} \quad (24)$$

Імпеданс п'єзорезонатора з урахуванням виразу для ξ з (3):

$$Z_r = \frac{1}{Y_r} = -\frac{j4}{S \varepsilon_{22} \omega^2} \left(\frac{h\omega}{2} + \frac{\bar{k}_{26}^2 \bar{c}_{66}}{2h\omega\rho - n\pi \sqrt{\bar{c}_{66}\rho}} \right). \quad (25)$$

Дотримуючись методики [9], визначимо дві величини: $\left(\frac{\partial Z_{r1}}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_s}$, де Z_{r1} взято з (14), а ω_s з (17); $\left(\frac{\partial Z_r}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_s}$, де Z_r взято з (25), а ω_s з (16).

В результаті отримуємо наступні співвідношення:

$$\left(\frac{\partial Z_{r1}}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_s} = j2L_n, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial Z_r}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_s} = \frac{j4h^3\rho}{Se_{26}^2 \left(1 + \pi / \sqrt{\pi^2 - 16\bar{k}_{26}^2 / n^2}\right)}. \quad (27)$$

Прирівнюючи вирази для імпедансу (26) і (27), визначаємо :

$$L_n = \frac{h^3 n^2 \pi^2 \rho \left(n^4 \pi^4 - 8\bar{k}_{26}^2 (n^2 \pi^2 - 2)\right)}{Se_{26}^2 \left(n^2 \pi^2 - 4\bar{k}_{26}^2\right)^3}. \quad (28)$$

Ємність конденсатора C_n визначимо з (17), з урахуванням (16) і (28):

$$C_n = \frac{4Se_{26}^2 \left(n^2 \pi^2 - 4\bar{k}_{26}^2\right)}{h\bar{c}_{66} \left(n^4 \pi^4 - 8\bar{k}_{26}^2 (n^2 \pi^2 - 2)\right)}. \quad (29)$$

Вираз для частоти паралельного резонансу f_p , що еквівалентна електричній схемі, зображеній на рисунку 2:

$$f_p = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_n \frac{C_n C_0}{C_n + C_0}}}. \quad (30)$$

Прирівнявши (33) до виразу для f_p з (22), с урахуванням (28) і (29), отримаємо вирази для визначення ємності конденсатора C_0 :

$$C_0 = \frac{S\epsilon_{22} \left(n^2 \pi^2 - 4\bar{k}_{26}^2\right)^3}{2h \left(n^6 \pi^6 - 10n^4 \pi^4 \bar{k}_{26}^2 + 32\bar{k}_{26}^6\right)}. \quad (31)$$

Вираз щодо частоти послідовного резонансу для схеми, що зображена на рис. 2, виходячи з параметрів ЕЕС (28, 29, 31), наступний:

$$f_{s3} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_n C_n}} = \frac{n}{4h} \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{\rho}} \left(1 - 4 \frac{\bar{k}_{26}^2}{n^2 \pi^2}\right). \quad (32)$$

Вираз (32) збігається з (16). Отже, відносна похибка визначення резонансної частоти $\Delta f / f_{s1} = \frac{f_{s1} - f_{s3}}{f_{s1}}$ запропонованої модифікованої методики дорівнюватиме нулю.

Висновки. У роботі представлений аналіз методик визначення параметрів ЕЕС п'єзоелектричних резонаторів та перетворювачів на основі моделі Butterworth-Van Dyke.

Встановлено, що методика № 1, яка набула найбільшого поширення, має значну абсолютну і відносну похибки при визначенні частоти послідовного резонансу f_s , виходячи з ЕЕС. Так, відносна похибка визначення резонансної частоти, що фігурує у числовому прикладі № 1, має порядок $10^{-4} \div 10^{-3}$, що є значним

у застосуванні до резонаторів, у яких відносна зміну частоти вимірюють у ppm (parts per million) – одна мільйонна частина. З роботи [9], де досліджувався вплив міжелектродного зазору на резонансну частоту коливань ПЕ, відомо, що відносна зміна частоти $\Delta f / f_0$ становило $10^{-4} \div 10^{-3}$, що можна порівняти з відносною похибкою визначення резонансної частоти методики № 1. Отримано аналітичний вираз для визначення відносної похибки визначення резонансної частоти f_s , виходячи з ЕЕС методики № 1.

Аналіз методики № 2 показав, що вона має відносну нульову похибку визначення резонансної частоти, виходячи з ЕЕС. Крім того, дана методика може бути застосована і для визначення ЕЕС п'єзореzonаторів з ненульовими граничними умовами, при цьому виключається поява вищезазначених похибок.

Запропоновано модифікацію методики № 1, у якій усунуто вище наведені недоліки, тобто отримала подальший розвиток модель BVD.

Отримано аналітичні вирази для розрахунку параметрів ЕЕС модифікованої методики № 1, які на відміну від існуючих (методика № 1) враховують залежність L_n і C_0 від гармонік n .

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Tiersten H.F. Linear Piezoelectric Plate Vibrations: *Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates*. Springer US. 1995. 212 p.
2. Yang J. Analysis of Piezoelectric Devices. *World Scientific*. 2006. 520 p.
3. Зеленка И. Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах: *Материалы, технология, конструкция, применение*: Пер. с чеш. 1990. 594 с.
4. Mindlin R.D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Structures*. 1972. Vol. 8. P. 895–906.
5. Huijing H. Thickness-shear vibration of a rectangular quartz plate with partial electrodes. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2013. Vol. 26. N. 2. P. 121–128.
6. Wang J. Resonant frequency function of thickness-shear vibrations of rectangular crystal plates. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control*. 2011. Vol. 58. N. 5. P. 1102–1107.
7. Liu N. Effects of a Mass Layer With Gradually Varying Thickness on a Quartz Crystal Microbalance. *IEE Sensors journal*. 2011. Vol.11. N. 8. P. 1635–1639.
8. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука. 1988. 472 с.
9. Васильчук Д.П., Семенець Д.А., Романуша В.О., Кобилянський Б.Б., Нефьодова І.В. Математична модель п'єзореzonансної коливальної системи на основі матрично-операторного метода. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2019. Вип. 2/2019 (46). С. 25–32.

REFERENCES:

1. Tiersten H.F. Linear Piezoelectric Plate Vibrations: *Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates*. Springer US. 1995. 212.
2. Yang J. Analysis of Piezoelectric Devices. *World Scientific*. 2006. 520.
3. Zelenka, Y. (1990). Pezoelektrycheskye rezonatory na obemnykh y poverkhnosnykh akustycheskykh volnakh [Piezoelectric resonators on bulk and surface acoustic wave]. *Materialy, tekhnolohiia, konstruktsiia, pryomenenye – Materials, technology, construction, application*, 594. [in Russian].
4. Mindlin R.D. High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates. *Int. J. Solids Structures*. 1972. Vol. 8. 895–906.
5. Huijing H. Thickness-shear vibration of a rectangular quartz plate with partial electrodes. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2013. Vol. 26. N. 2. 121–128.

6. Wang J. Resonant frequency function of thickness-shear vibrations of rectangular crystal plates. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control*. 2011. Vol. 58. N. 5. 1102–1107.
 7. Liu N. Effects of a Mass Layer With Gradually Varying Thickness on a Quartz Crystal Microbalance. *IEE Sensors journal*. 2011. Vol. 11. N. 8. 1635–1639.
 8. Parton, V.Z., & Kudrjavcev, B.A. (1988). Elektromahnytopruhost pezoelektrycheskykh y elektroprovodnykh tel [Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies]. M.: Nauka. [in Russian].
 9. Vasylichuk, D.P., Semenets, D.A., Romanusha, V.O., Kobylianskyi, B.B., & Nefodova, I.V. (2019). Matematychna model piezorezonansnoi kolyvalnoi systemy na osnovi matrychno-operatornoho metoda [Mathematical model of piezoresonant oscillatory system based on matrix-operator method]. *Elektromekhanichni i enerhozberihaiuchi systemy – Electromechanical and energy saving systems*, 2/2019 (46), 25–32. [in Ukrainian].
-