УДК 517.272, 517.912
DOI https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.1.19

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ ВОДНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

Сиваш С.Б. *– кандидат фізико-математичних наук,*
доцент кафедри математики, фізики та астрономії
Одеського національного морського університету
ORCID ID: 0000-0002-9726-7865

Соколовська Г.В. *– старший викладач кафедри математики,*
фізики та астрономії
Одеського національного морського університету
ORCID ID: 0000-0001-8161-1660

Різке зростання світових цін на енергоносії актуалізує завдання мінімізації витрат матеріалів, електроенергії та інших ресурсів у гідротехнічному будівництві, судноплавстві та суміжних галузях. Дослідження таких завдань має значний теоретичний та вагомий практичний інтерес. Потужними засобами розв'язання широкого кола інженерних задач з практичним змістом є математичний аналіз та диференціальні рівняння. Побудова математичної моделі процесу дає можливість застосування методів оптимізації. Вибираючи певним чином параметри управління, можна оптимізувати цільову функцію, яка залежить від цих параметрів. Формалізація практичної задачі дозволяє відкинути фактори, що не мають визначного впливу на процес. Завдяки цьому стає можливим скласти диференціальне рівняння для дослідження фізичного процесу. Доповнення задачі початковими умовами дає можливість отримати єдиний розв'язок. Зазначимо, що здебільшого отримані диференціальні рівняння є нелінійними та розв'язуються лише наближеними методами.

У роботі розглянуто низку інженерних задач з практичним змістом. Зокрема, задача мінімізації поверхні каналу, що омивається; дослідження швидкості руху судна за певних умов; задача мінімізації витрат матеріалів у гідротехнічному будівництві та деякі інші задачі. Для їх розв'язання побудовано відповідні математичні моделі. Методами математичного аналізу функції однієї та декількох змінних, диференціальних рівнянь знайдено точні розв'язки цих задач.

Вивчення таких задач веде до більш глибокого розуміння фізичних явищ та процесів і можливості розв'язання задач, що виникають в інженерії та суміжних галузях, зокрема, аеродинаміці, теорії гравітації та у інших областях науки і техніки.

Ключові слова: *мінімізація, функція, оптимізація, диференціальні рівняння, гідродинаміка.*

Syvash S.B., Sokolovska H.V. Mathematical methods in the problems of water engineering

The sharp rise in world energy prices highlights the task of minimizing the cost of materials, electricity and other resources in hydraulic engineering, shipping and related industries. The study of such problems is of considerable theoretical and significant practical interest. Mathematical analysis and differential equations are powerful tools for solving a wide range of engineering problems with practical content. Building a mathematical model of the process allows the use of optimization methods. By selecting control parameters in a certain way, you can optimize the target function, which depends on these parameters. Formalization of a practical task allows to reject factors that do not have a significant impact on the process. This makes it possible to make a differential equation to study the physical process. Complementing the problem with initial conditions makes it possible to obtain a single solution. Note that in most cases the obtained differential equations are nonlinear and can be solved only by approximate methods.

The paper considers a number of engineering problems with practical content. In particular, the task of minimizing the surface of the channel being washed; study of the speed of the vessel under certain conditions; the task of minimizing the cost of materials in hydraulic engineering and some other tasks. Appropriate mathematical models have been built to solve them. Exact solutions of these problems have been found by methods of mathematical analysis of the function of one and several variables, differential equations.

The study of such problems leads to a deeper understanding of physical phenomena and processes and the ability to solve problems arising in engineering and related fields, including aerodynamics, gravity theory and other fields of science and technology.

Key words: *minimization, function, optimization, differential equation, hydrodynamics.*

Вступ. Сучасний етап розвитку математичних дисциплін зумовлений новими виробничими технологіями, інформатизацією та комп'ютеризацією виробничої діяльності. Освоєння нових технологій водної інженерії та суміжних галузей вимагають усе більш глибокого проникнення у суть природних процесів, і математика відіграє у цьому процесі дуже важливу роль.

Математизація науки дедалі поглиблюється [1], процес інтеграції її різних галузей приводить до нових класів задач, розв'язання яких є викликом для сучасних інженерів. Навіть елементарні фізичні процеси і явища дістають глибше розуміння у разі певної математичної розробки.

У курсі математичного аналізу значна увага приділяється вивченню неперервних функцій [2; 4], зокрема, тому що до таких функцій ми часто приходимо у процесі вивчення законів руху, температурних залежностей тощо. Водночас уже під час розглядання механічного руху доводиться мати справу з розривними функціями, коли тіло, що рухається, зазнає удару. Прикладом розривної функції може служити залежність від часу різниці потенціалів на виході генератора пилкоподібної напруги. Ця залежність виражається періодичною функцією, яка щоперіоду миттєво змінює свій знак на протилежний, зазнаючи при цьому розриву. Взагалі функції, що описують процеси, супроводжувані явищами ударного, імпульсного характеру, завжди мають точки розриву.

Одним з найпотужніших засобів математичного моделювання реальних процесів є диференціальні рівняння [3], які мають широке коло застосувань у задачах гідродинаміки, суднобудування та інших галузей водної інженерії.

Постановка проблеми. Практично в кожній проблемі технічного змісту ми маємо справу з величинами, значення яких у певних межах можемо задавати довільно (це так звані параметри управління), і з функціями, що залежать від них (так звані цільові функції). Задача полягає в тому, щоб вибрати такі можливі значення параметрів управління, які оптимізують цільову функцію. Математичне дослідження практичних задач містить зазвичай три етапи:

а) побудову математичної моделі процесу;

б) дослідження моделі та розв'язування отриманої математичної задачі;

в) застосування отриманих результатів на практиці та пошук інших галузей застосування як цих результатів, так і самої математичної моделі.

Обов'язковим етапом побудови математичної моделі є ідеалізація та формалізація практичної задачі. На цьому етапі необхідно з'ясувати, які фактори не мають визначного впливу на процес, що відбувається. Нехтування ними дає можливість спростити задачу і скласти диференціальне рівняння.

Виклад основного матеріалу. Задача 1. Циліндричний бак виготовляють, зварюючи краї зігнутого у циліндр сталевого листа вздовж твірної і приварюючи з двох боків до одержаної труби днища. Якими повинні бути довжина твірної h і радіус днища r, щоб у разі заданого об'єму бака V загальна довжина зварних швів була мінімальною?

Згідно з умовою задачі загальна довжина зварних швів дорівнює $l = h + 4\pi r$. Тут $h > 0,\ r > 0$, причому h і r пов'язані умовою $\pi r^2 h = V$, звідки $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Цільовою функцією є $l(r) = \frac{V}{\pi r^2} + 4\pi$. Знаходимо стаціонарні точки.

$l'(r) = -\dfrac{2V}{\pi r^3} + 4\pi = 0$, звідки $r^3 = \dfrac{V}{2\pi^2}$, $\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi^2}}$. Ця точка є точкою локального мінімуму функції $l(r)$, а водночас і глобального, як легко пересвідчитися. Цьому значенню r відповідає довжина твірної $h = \dfrac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{4\pi V}$.

Відношення $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\sqrt[3]{4\pi V}\,\sqrt[3]{2\pi^2}}{\sqrt[3]{V}} = 2\pi$, отже, загальна довжина зварних швів буде мінімальною при $h = 2\pi r$, тобто коли довжина твірної дорівнює довжині контуру днища.

У багатьох реальних задачах доводиться оптимізувати функції кількох параметрів управління.

Задача 2. Переріз каналу має форму рівнобічної трапеції $ABCD$ заданої площі S (рис. 1). Якими мають бути величини $l,\ b,\ \alpha$, щоб поверхня каналу, що омивається, була найменшою?

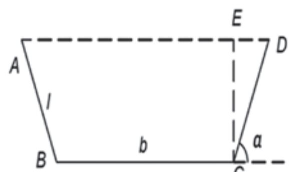

Рис. 1

Формалізуємо спочатку задачу. Зрозуміло, що шукана поверхня буде найменшою за найменшого значення величини

$$z = AB + BC + CD = 2l + b. \tag{1}$$

Але величини $l,\ b,\ \alpha$ мають бути такими, щоб переріз каналу мав задану площу S.

З геометричних міркувань $S = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot EC$ (EC – висота трапеції).

Оскільки $EC = l\sin\alpha,\ BC = b,\quad AD = BC + 2ED = b + 2l\cos\alpha,$

то $S = \dfrac{b + b + 2l\cos\alpha}{2} \cdot l\sin\alpha = (b + l\cos\alpha)l\sin\alpha.$ Отже, $b = \dfrac{S}{l\sin\alpha} - l\cos\alpha$.

Підставивши це до (1), отримаємо:

$$z = l(2 - \cos\alpha) + \frac{S}{l\sin\alpha}. \tag{2}$$

З рис. 1 бачимо, що

$$0 < \alpha < \pi,\ 0 < l < \infty. \tag{3}$$

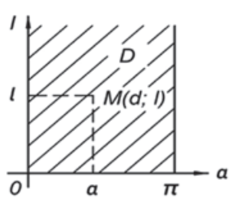

Рис. 2

Таким чином, отримана задача: визначити величини α та l, що задовольняють умови (3), за яких функція z, яка залежить від цих величин, набуває найменшого значення за умови, що S – стала величина.

Дослідимо спочатку функцію (2). Її область визначення D задана умовами (3) та зображена на рис. 2.

Межа зображеної області не належить області визначення функції. З умов (3) видно, що функція (2) неперервна в D та набуває лише додатних значень. Позначимо через $M(\alpha; l)$ внутрішню точку області D. Якщо ця точка буде наближатися до межі області D, то буде виконуватися одна з таких умов: $\alpha \to 0$, або $\alpha \to \pi$, або $l \to 0$. У кожному з цих випадків а також при $l \to \infty$ $(0 < \alpha < \pi)$ відповідно до рівності (2) функція $z \to +\infty$. З цього доходимо висновку, що додатна та неперервна в області D функція (2) має найменше значення, але найбільшого значення для неї не існує. Знайдемо частинні похідні функції z:

$$z'_\alpha = l\sin\alpha - \frac{S\cos\alpha}{l\sin^2\alpha}, \qquad z'_l = 2 - \cos\alpha - \frac{S}{l^2\sin\alpha}.$$

Частинні похідні існують у всіх внутрішніх точках області D. Знайдемо точки, у яких частинні похідні дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} l^2 \sin^3\alpha - S\cos\alpha = 0, \\ l^2 \sin\alpha(2-\cos\alpha) - S = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння отримаємо:

$$l^2 = \frac{S}{(2-\cos\alpha)\sin\alpha}. \qquad (4)$$

Підставивши вираз (4) до першого рівняння системи, знайдемо

$$\alpha : \frac{S\sin^2\alpha}{2-\cos\alpha} - S\cos\alpha = 0, \;\; \sin^2\alpha - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0,$$

$$1 - 2\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

З рівності (4) знаходимо $l = \sqrt{\dfrac{S}{(2-\cos 60^\circ)\sin 60^\circ}} = \dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}$.

Таким чином, функція (2) у точці $\left(\alpha = 60^\circ; l = \dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}\right)$ набуває найменшого значення. Відповідна поверхня каналу, що омивається, дорівнює

$$b = \frac{2S\sqrt[4]{27}}{2\sqrt{3S}} - \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{27}}.$$

Задача 3. Нехай циліндричний резервуар, шо має висоту H та радіус основи R, по вінця заповнений водою. Вода з резервуару виливається через отвір площі S у його дні (рис. 3).

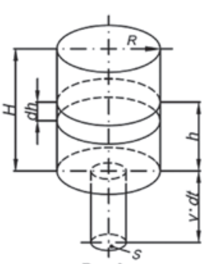

Рис. 3

Визначимо, за який час вся вода витече, якщо чверть усієї води виливається за t_1 секунд. Можна вважати цю задачу відображенням реального процесу скидання води з баластної системи судна. Зрозуміло, що вода з резервуару витікає нерівномірно, зменшення швидкості v витікання зумовлене зниженням висоти h стовпа рідини у цьому процесі. Згідно з законом Торрічеллі, точна рівність $v = k\sqrt{2gh}$, де $g-$ прискорення вільного падіння, k – коефіцієнт, що пов'язаний з властивостями рідини та формою отвору, наприклад, для води у випадку круглого отвору $k = 0,6$. Нехай у момент часу t висота стовпа рідини дорівнювала h, а за проміжок часу тривалістю $\varnothing t$ вона знизилася до значення $h + \Delta h$ ($\varnothing h$ – від'ємний приріст висоти). Об'єм рідини $\varnothing V$, що вилилася за цей час, дорівнює об'єму циліндра висоти $|\Delta h| = -\Delta h$ з радіусом основи R: $\Delta V = -\pi R^2 \Delta h$. Ця рідина вилилася з резервуару у вигляді тоненького струменя циліндричної форми з площею основи S та висотою, що дорівнює шляху, який пройдено водою за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$. На початку цього проміжку $v(t) = k\sqrt{2gh}$, а у кінці $v(t+\Delta t) = k\sqrt{2g(h+\Delta h)}$. Вважатимемо проміжок часу $\varnothing t$ (а відповідно й $\varnothing h$) настільки малим, що ці значення швидкості є майже однаковими. Отже, вважаємо, що шлях, пройдений рідиною за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$, дорівнює $k\sqrt{2gh}\cdot\Delta t$, тому об'єм рідини, що вилилася, дорівнює $\Delta V = k\sqrt{2gh}\cdot\Delta t\cdot S$. Прирівняємо два отримані вирази для $\varnothing V$. Маємо рівняння: $-\pi R^2\Delta h = k\sqrt{2gh}\cdot\Delta t\cdot S$. Розділимо обидві частини останнього рівняння на $\varnothing t$ і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$, отримавши диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (5):

$$-\pi R^2 \frac{dh}{dt} = k\sqrt{2gh}\cdot S. \qquad (5)$$

Розділимо обидві частини цього рівняння на $\left(-\pi R^2\right)$ і позначимо дріб $\frac{\neq R^2}{kS\sqrt{2g}}$ через A. Одержимо рівняння $dt=-\frac{A}{\sqrt{h}}dh$, загальний розв'язок якого має вигляд $t=-A\left(2\sqrt{h}+C\right)$, де C – довільна стала. Підставимо початкову умову: у початковий момент часу $(t=0)$ $h=H$ – висоті резервуара. Тоді $C=-2\sqrt{H}$, отже, отримаємо розв'язок задачі Коші: $t=-2A\left(\sqrt{h}-\sqrt{H}\right)$. Він містить сталу A, значення якої залежить від площі поперечного перерізу резервуара, площі отвору та в'язкості рідини. Знайдемо A, використовуючи умову: за t_1 секунд спустошується чверть резервуара.

Отже, значенню $t=t_1$ відповідає $h=\frac{3}{4}H$, тоді $A=\dfrac{t_1}{2\sqrt{H}\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{t_1\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{H}}$.

Таким чином, $t=-2\dfrac{t_1\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{H}}\left(\sqrt{h}-\sqrt{H}\right)=2t_1\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{\dfrac{h}{H}}\right)$.

Тепер нескладно знайти час повного спорожнення резервуара, підставивши у останню рівність $h=0$.

Уся вода витече за $t=2t_1\left(2+\sqrt{3}\right)$ секунд. Зрозуміло, що отримане значення не є точним. Адже ми знехтували капілярними явищами (а вони є істотними за малого діаметру отвору), завихренням рідини поблизу стінок резервуара (воно утворюється через те, що у цьому шарі рідини відбувається перехід швидкості від 0 до v) та багатьма іншими факторами. Проте отриманий результат є значно точнішим, аніж той, який би ми отримали, вважаючи швидкість витікання сталою (у цьому разі резервуар повністю спорожнів би за $4t_1$ секунд). Проаналізуємо отриманий результат. Враховуючи зв'язок між t_1 та A, маємо: $t=2A\sqrt{H}=\frac{2\pi R^2\sqrt{H}}{kS\sqrt{2g}}$. Як бачимо, час, протягом якого спорожніє резервуар, тим більший, чим більшими є його розміри (R та H), і тим менший, чим більші площа отвору S та коефіцієнт k. Цей результат не суперечить здоровому глузду ще й тому, що величина, котра дорівнює дробу з останньої рівності, вимірюється у секундах.

Зауважимо, що за аналогією можна розв'язати таку саму задачу для резервуара будь-якої форми, необхідно лише знати функцію $\sigma(h)$, що виражає залежність площі поперечного перерізу резервуара σ від висоти h. Тоді замість рівняння (5) матимемо: $-\sigma(h)\frac{dh}{dt}=k\sqrt{2gh}\cdot S$, що також є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Ще одне застосування диференціальних рівнянь ми знаходимо у задачі про рух судна маси m після вимикання двигуна.

Задача 4. Уявімо, що двигун було вимкнено у той момент $(t_0=0)$, коли швидкість судна дорівнювала v_0. Після цього судно рухається за інерцією, але дедалі повільніше, у момент часу t_1 $(t_1>0)$ його швидкість вже дорівнює v_1.

Поставимо задачу: знайти закон, за яким змінюється швидкість судна – функція $v(t)$, якщо опір середовища пропорційний швидкості. Нехай $a(t)$ – від'ємне прискорення, причому $a(t)=\frac{dv(t)}{dt}$. Тоді сила, що діє на тіло у напрямі його руху, дорівнює $m\cdot\frac{dv}{dt}$. Оскільки ж ця сила за абсолютною величиною дорівнює силі опору середовища, а за напрямом їй протилежна, то шукана функція швидкості задовольняє диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=-kv,$$

тут k – додатний коефіцієнт, що визначається властивостями середовища, у якому відбувається рух судна.

Розв'яжемо його.

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=-kv \Leftrightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt \Leftrightarrow \int\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}\int dt \Leftrightarrow \ln|v|=-\frac{k}{m}t+\ln|C|,$$

C – довільна стала, або $\ln|v|=\ln e^{-\frac{k}{m}t}+\ln|C|$. Звідки маємо: $v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$. Якщо відома початкова швидкість v_0 судна, то, додавши умову $v(0)=v_0$ до диференціального рівняння, одержимо задачу Коші. Розв'язок задачі Коші: $v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$. Якщо скористатись умовою $v(t_1)=v_1$, то можна знайти значення коефіцієнта пропорційності k:

$$v_1=v_0e^{-\frac{k}{m}t_1}\text{, отже } k=\frac{m}{t_1}\ln\frac{v_0}{v_1}.$$

Таким чином, шукана функція швидкості: $v(t)=v_0e^{-\frac{t}{t_1}\ln\frac{v_0}{v_1}}=v_0\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{\frac{t}{t_1}}$.

Висновки. Математичні методи, що застосовуються у гідродинаміці, можуть бути застосовані для розв'язування задач гідротехнічного будівництва, оптимізації судноплавства, аеродинаміки, теорії гравітації та у інших галузях науки і техніки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Клайн М. Математика. Поиск истины. Москва : Мир, 1988. 205 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 2 т. Москва : Наука, 1985. Т. 1. 429 с.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 2 т. Москва : Наука, 1985. Т. 2. 560 с.

4. Кирилов С.О., Кусік Л.І., Сиваш С.Б., Соколовська Г.В. Вища математика (частина 1) : підручник. Одеса : ФОП Кравченко Я.О., 2020. 175 с.

REFERENCES:

1. Klayn, M. (1988). *Matematika. Poisk istiny* [Maths. The search for truth]. Moscow: Mir [in Russian].

2. Piskunov, N.S. (1985). *Differentsial'noe i integral'noe ischisleniya dlya vtuzov* [Differential and integral calculations for universities]. Moscow: Nauka. Vol. 1 [in Russian].

3. Piskunov, N.S. (1985). *Differencial'noe i integral'noe ischislenia dlya vtuzov* [Differential and integral calculations for universities]. Moscow: Nauka. Vol. 2 [in Russian].

4. Kyrylov, S.O., Kusik, L.I., Syvash, S.B., Sokolovska, H.V. (2020). *Vyshcha matematyka (chastyna 1)* [Higher Maths (part 1)]. Odesa: FOP Kravchenko Ya.O. [in Ukrainian].