

УДК 624.01

DOI <https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.1.21>

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ УХИЛУ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ БАЛКИ

Янін О.Є. – кандидат технічних наук,
доцент кафедри будівництва, архітектури та дизайну
Херсонського державного аграрно-економічного університету
ORCID ID: 0000-0003-0230-8669

У статті наводиться рішення теоретичної задачі оптимізації ухилу залізобетонної балки та підбору оптимальної висоти на опорі. Розглядається однопролітна шарнірно обперта попередньо напружена двосхила балка прямокутного поперечного перерізу, яка завантажена рівномірно розподіленим лінійним навантаженням.

Положення поперечного перерізу балки за довжиною характеризується змінною абсцисою. Висота балки на певній відстані від лівої опори розраховується у відповідності до певного ухилу. Робоча висота балки у цьому місці визначається у разі заданої відстані від нижньої розтягнутої грані балки до центру ваги розтягнутої попередньо напруженої арматури.

Умова міцності балки за нормальним перерізом у разі одиничного армування і рівняння рівноваги отримуються виходячи зі статичних залежностей. Несуча здатність перерізу на відомій відстані від лівої опори виражається через граничний згинальний момент, який являє собою лінійну функцію від координати уздовж прольоту.

На першому етапі рішення задачі визначається потрібна висота балки на опорі з умови міцності за заданих ухилів верхньої полиці і площі поперечного перерізу попередньо-напруженої арматури. Доводиться, що у разі доторкання графіків несучої здатності і згинального моменту від навантаження на балку міцність за нормальними перерізами забезпечена уздовж усього прольоту. На цій підставі робиться висновок, що робочу висоту балки на опорі можна визначити з рівнянь рівності моментів і їх перших похідних.

На другому етапі рішення задачі визначається ухил верхнього поясу, за якого об'єм бетону для балки буде найменшим. Оскільки площа поперечного перерізу поздовжньої арматури прийнята незмінною, досить мінімізувати тільки цей об'єм. Щоб дослідити функцію об'єму на екстремум знаходиться її перша похідна по ухилу та прирівнюється до нуля.

Задача оптимізації була розв'язана за певних контрольних вихідних даних. Був отриманий графік функції об'єму, який має мінімум у разі певного значення ухилу. Розроблена і наведена методика виконання перевірки на обмеження висоти стиснутої зони бетону за оптимального ухилу. У разі невиконання умови обмеження рекомендовано прийняти меншу площу поперечного перерізу попередньо-напруженої арматури. Доведено, що у такому разі збільшується висота балки і зменшуються відносна висота стиснутої зони та прогин.

Ключові слова: двосхила балка, оптимізація, ухил, об'єм бетону, робоча висота, умова міцності.

Yanin O.E. The problem of slope optimization of the reinforced concrete prestressed beam

The solution of the theoretical problem of slope optimization of the reinforced concrete beam and selection of the optimal height on the support is given in the article. A single-span hinged prestressed double-sloped beam of rectangular cross-section, which is loaded with a uniformly distributed linear load, is considered.

The position of the cross section of the beam in length is characterized by a variable abscissa. The height of the beam at a certain distance from the left support is calculated in accordance with a certain slope. The working height of the beam in this place is determined at a given distance from the lower stretched face of the beam to the centre of gravity of the stretched pre-stressed reinforcement.

The condition of the strength of the beam in the normal cross section with a single reinforcement and the equilibrium equation are obtained based on static dependences. The bearing capacity of the section at a known distance from the left support is expressed in terms of the ultimate bending moment, which is a linear function of the coordinate along the span.

At the first stage of solving the problem, the required height of the beam on the support is determined from the condition of strength at a given slope of the upper shelf and the cross-sectional

area of the pre-stressed reinforcement. It is proved that when touching the graphs of bearing capacity and bending moment from the load on the beam, the strength of the normal cross-sections is provided along the entire span. On this basis, it is concluded that the working height of the beam on the support can be determined from the equations of equality of moments and their first derivatives.

In the second stage of solving the problem, the slope of the upper belt is determined, at which the volume of concrete for the beam will be the smallest. Since the cross-sectional area of the longitudinal reinforcement is assumed to be constant, it is sufficient to minimize only this volume. To investigate the function of volume at the extremum, there was found its first derivative of the slope and equated to zero.

The optimization problem was solved with certain control source data. A graph of the volume function was obtained, which has a minimum at a certain value of the slope. The technique of performance of check on restriction of height of a compressed zone of concrete at an optimum slope is developed and resulted. If the restriction condition is not met, it is recommended to take a smaller cross-sectional area of the pre-stressed reinforcement. It is proved that in this case the height of the beam increases and the relative height of the compressed zone and deflection decrease.

Key words: beam slope, optimization, slope, concrete volume, working height, strength condition.

Постановка проблеми. Рішення задач оптимізації будівельних конструкцій загалом і залізобетонних конструкцій зокрема є невід'ємним складником раціонального проектування. Тому створення відповідних методів розрахунку відкриває можливість отримати певний економічний ефект.

Стан вивчення проблеми. Відомо, що проектування залізобетонних конструкцій починається з визначення конструктивних розмірів і тільки після цього виконується підбір арматури. Такий підхід пов'язаний з урахуванням досвіду проектування і не завжди дозволяє отримати економічне рішення.

Завдання і методика досліджень. За певних умов можна використати зворотний порядок проектування, що дозволить мінімізувати витрати бетону у разі заданої площі поперечного перерізу арматури A_p . Такий підхід зводиться до підбору оптимальних висоти балки на опорі та ухилу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо однопролітну шарнірно опертую попередньо напружену двосхилу балку прямокутного поперечного перерізу, яка завантажена рівномірно розподіленим лінійним навантаженням q (рис. 1) [1–4].

Положення поперечного перерізу балки за довжиною будемо характеризувати абсцисою z . Змінна висота балки на відстані z від лівої опори

$$h_{(z)} = H + i \cdot z, \quad (1)$$

де H – висота балки на опорі;

i – ухил верхнього поясу балки.

Тоді робоча висота балки у цьому місці

$$d_{(z)} = H + i \cdot z - a = d_0 + i \cdot z, \quad (2)$$

де a – відстань від нижньої розтягнутої грані балки до центру ваги розтягнутої попередньо напруженої арматури A_p ;

d_0 – робоча висота балки на опорі;

$$d_0 = H - a. \quad (3)$$

Умова міцності балки за нормальним перерізом у разі одиничного армування і рівняння рівноваги прийняті на підставі статичних залежностей у разі змінної робочої висоти [5–7].

Тоді несуча здатність перерізу на відстані z лівої опори, що виражається через граничний згинальний момент

$$M_{u(z)} = f_{pd} A_p \left(d_0 + iz - 0,5 \frac{f_{pd} A_p}{f_{cd} b} \right). \quad (4)$$

Цей момент являє собою лінійну функцію від z .

На першому етапі рішення задачі треба знайти потрібну з умови міцності робочу висоту балки на опорі d_0 за заданих i і A_p .

Функція згинального моменту від навантаження на балку

$$M_{(z)} = \frac{1}{2} qz(L - z) = \frac{1}{2} qLz - \frac{1}{2} qz^2. \quad (5)$$

Графік цієї функції має вигляд увігнутої квадратної параболи за осі ординат, направленої вниз. Тому якщо графік прямої $M_{u(z)}$ торкається параболи $M_{(z)}$, як показано на рис. 1, то уздовж усього прольоту балки буде забезпечена міцність за нормальними перерізами:

$$M_{(z)} = M_{u(z)}. \quad (6)$$

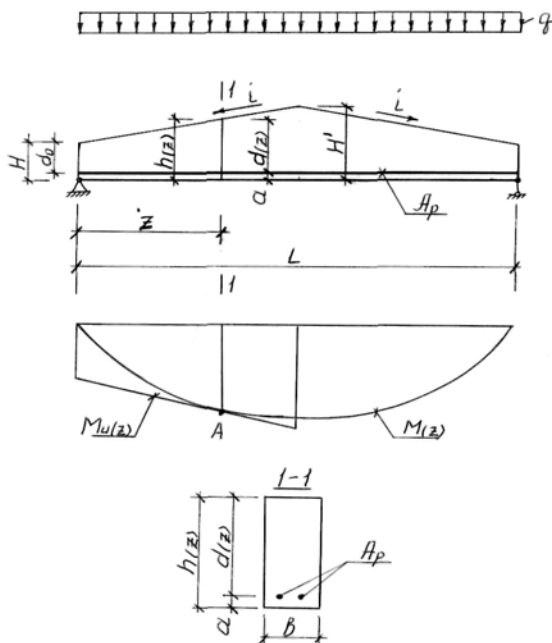


Рис. 1. Розрахункова схема балки

У такому разі робочу висоту балки на опорі d_0 треба визначати на підставі рішення наступної системи двох рівнянь

$$M_{(z)} = M_{u(z)}; \quad (7)$$

$$\frac{dM_{(z)}}{dz} = \frac{dM_{u(z)}}{dz}. \quad (8)$$

Окрім d_0 , невідомою величиною буде також відстань уздовж горизонталі від лівої опори до точки доторкання $z = z_{on}$.

Після підстановки $M_{u(z)}$ і $M_{(z)}$, згідно з формулами (4) і (5) у вирази (7) і (8), зазначена система рівнянь прийме вигляд:

$$\frac{1}{2} qz(L - z) = f_{pd} A_p \left(d_0 + iz - 0,5 \frac{f_{pd} A_p}{f_{cd} b} \right); \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} qL - qz = f_{pd} A_p i. \quad (10)$$

З останнього рівняння:

$$z = z_{on} = \frac{L}{2} - \frac{f_{pd} A_p i}{q}. \quad (11)$$

Після підстановки $z = z_{on}$ з виразу (11) у рівняння (9) отримаємо

$$d_0 = \frac{qL^2}{8f_{pd} A_p} - \frac{iL}{2} + \frac{f_{pd} A_p i^2}{2q} + \frac{f_{pd} A_p}{2f_{cd} b}. \quad (12)$$

З урахуванням формули (3) висота балки на опорі

$$H = \frac{qL^2}{8f_{pd} A_p} - \frac{iL}{2} + \frac{f_{pd} A_p i^2}{2q} + \frac{f_{pd} A_p}{2f_{cd} b} + a. \quad (13)$$

На другому етапі рішення задачі визначається ухил верхнього поясу, за якого об'єм бетону для балки V_b буде найменшим. Оскільки площа поперечного перерізу поздовжньої арматури A_p прийнята незмінною, досить мінімізувати тільки V_b . Цільова функція об'єму бетону має вигляд

$$V_b = \frac{H + H'}{2} Lb = HLb + \frac{iL^2 b}{4}, \quad (14)$$

де H' – висота балки посередині прольоту (див. рис. 1)

$$H' = H + i \frac{L}{2}. \quad (15)$$

Після підстановки H з формули (13) у вираз (14) отримаємо

$$V_b = \left[\frac{qL^2}{8f_{pd} A_p} - \frac{iL}{2} + \frac{f_{pd} A_p i^2}{2q} + \frac{f_{pd} A_p}{2f_{cd} b} + a \right] Lb + \frac{iL^2 b}{4}. \quad (16)$$

Щоб дослідити функцію $V_b = V_{b(i)}$ на екстремум треба знайти її першу похідну по i та прирівняти отриманий вираз нулю [8–9]:

$$\frac{dV_b}{di} = \left[-\frac{L}{2} + \frac{f_{pd} A_p i}{q} \right] Lb + \frac{L^2 b}{4} = -\frac{L^2 b}{4} + \frac{Lb f_{pd} A_p i}{q} = 0. \quad (17)$$

Звідси

$$i = i_{onm} = \frac{qL}{4 f_{pd} A_p}. \quad (18)$$

Оскільки друга похідна функції $V_{b(i)}$ по i $\frac{d^2 V_b}{di^2} = \frac{Lb f_{pd} A_p}{q} > 0$, при $i = i_{onm}$ об'єм бетону для балки буде мінімальним.

Задача оптимізації була розв'язана за таких контрольних вихідних даних:

$$q = 0,40 \text{ кН/см} = 40 \text{ кН/м}; \quad L = 1800 \text{ см} = 18 \text{ м}; \quad b = 20 \text{ см}; \quad f_{pd} = 680 \text{ МПа} = 68 \text{ кН/см}^2; \\ f_{cd} = 17 \text{ МПа} = 1,7 \text{ кН/см}^2; \quad A_p = 20 \text{ см}^2.$$

Був отриманий графік функції $V_{b(i)}$, який має мінімум при $i = 0,1323529$ (рис. 2). Таке саме значення було отримане за формулою (18).

При цьому висота балки на опорі становила $H = 58,779$ см.

У елемента, що працює на згин, висота стиснутої зони бетону повинна бути обмеженою. Тому після визначення i_{opt} треба впевнитись, що уздовж прольоту відносна висота стиснутої зони

$$\xi = x/d \leq \xi_R, \quad (19)$$

де ξ_R – гранична відносна висота стиснутої зони бетону.

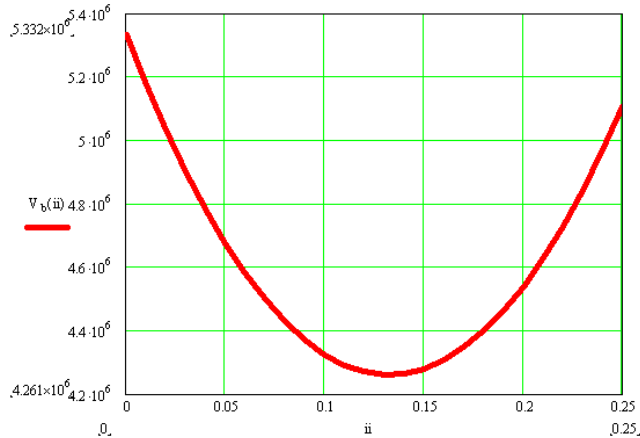


Рис. 2. Графік функції $V_b(i)$

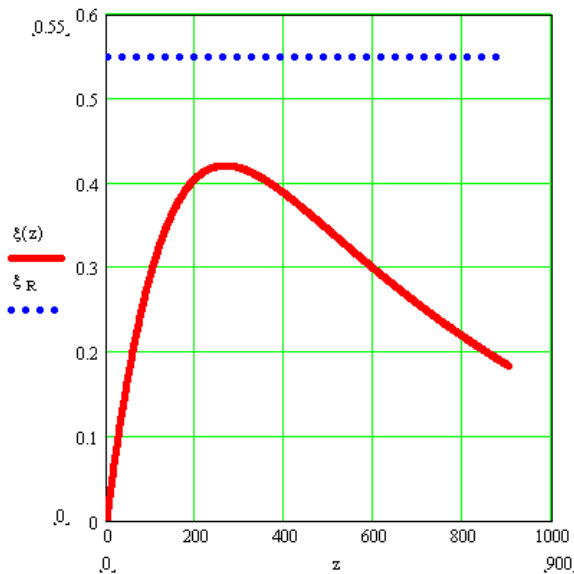


Рис. 3. Графік функції $\xi(z)$

Щоб знайти ξ на будь-якій відстані z від лівої опори, треба послідовно розрахувати такі функції:

$$d_{(z)} = H + i \cdot z - a = d_0 + i \cdot z, \quad (20)$$

$$A_{0(z)} = \frac{M_{(z)}}{f_{cd} b d_{(z)}^2}, \quad (21)$$

$$\xi_{(z)} = 1 - \sqrt{1 - 2A_{0(z)}}. \quad (22)$$

Графік останньої функції на лівій половині довжини прольоту за контрольних вихідних даних і $\xi_R = 0,55$ наведений на рис. 3.

Висновки та пропозиції.

Із графіка видно, що у будь-якій точці прольоту виконується умова $\xi_{(z)} < \xi_R$. У разі, коли ця умова не виконується або не забезпечена жорсткість балки, треба прийняти меншу площу попереч-

ного перерізу арматури A_p . Тоді збільшиться висота балки і відповідно зменшаться ξ та її прогин. У подальших дослідженнях доцільно розглянути оптимізацію ухилу балки двотаврового поперечного перерізу, оскільки вона є більш економічною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. Міністерство регіонального розвитку та будівництва України. Київ. 2011. 71 с.
2. ДСТУ Б В.2.6-156:2010. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування. Міністерство регіонального розвитку та будівництва України. Київ. 2011. 118 с.
3. ДСТУ Б В.1.2-3 2006. Прогини і переміщення. Вимоги проектування. Міністерство регіонального розвитку та будівництва України. Київ. 2006. 10 с.
4. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. Норми проектування. Міністерство регіонального розвитку та будівництва України. Київ. 2006. 78 с.
5. Вахненко П.Ф. Залізобетонні конструкції. Київ : Урожай. 1995. 368 с.
6. Мандриков А.П. Примеры расчета железобетонных конструкций : учебное пособие для техникумов. Москва : Стройиздат. 1989. 506 с.
7. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс : учебник для вузов. Москва : Стройиздат, 1991. 767 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Москва : Физматгиз. 1963. 856 с.
9. Смирнов А.Ф. Соппротивление материалов : Учебник для вузов. Москва : Высшая школа. 1975. 480 с.

REFERENCES:

1. DBN V.2.6-98:2009. (2011). *Betonna ta zalizobetonna konstruktsiyyi. Osnovni polozhennya. Ministerstvo rehional'noho rozvytku ta budivnytstva Ukrainy* [Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions. Ministry of Regional Development and Construction of Ukraine]. Kyiv, 71 s. [in Ukrainian].
2. DSTUB V.2.6-156:2010. (2011). *Betonna ta zalizobetonna konstruktsiyyi z vazhkoho betonu. Pravyly proektuvannya. Ministerstvo rehional'noho rozvytku ta budivnytstva Ukrainy* [Concrete and reinforced concrete structures made of heavy concrete. Design rules. Ministry of Regional Development and Construction of Ukraine]. Kyiv, 118 s. [in Ukrainian].
3. DSTU B V.1.2-3 2006. (2006). *Prohyny ta peremishchennya. Vymohy proektuvannya. Ministerstvo rehional'noho rozvytku ta budivnytstva Ukrainy* [Deflections and displacements. Design requirements. Ministry of Regional Development and Construction of Ukraine]. Kyiv, 10 s. [in Ukrainian].
4. DBN V.1.2-2:2006. (2006). *Navantazhennya ta vplyvy. Normy proektuvannya. Ministerstvo rehional'noho rozvytku ta budivnytstva Ukrainy* [Loads and effects. Design standards. Ministry of Regional Development and Construction of Ukraine]. Kyiv, 78 s. [in Ukrainian].
5. Vakhnenko, P.F. (1995). *Zalizobetonna konstruktsiyyi* [Reinforced concrete structures]. Kyiv, Urozhay. 368 s. [in Ukrainian].
6. Mandrykov, A.P. (1989). *Prymery rascheta zhelezobetonnykh konstruktsyy* [Examples of the calculation of reinforced concrete structures]. *Uchebnoe posobyie dlya tekhnikumov* [Textbook for technical schools]. Moskva, Stroyizdat, 506 s. [in Russian].

7. Baykov, V.N., Sigalov E.Ye. (1991). *Zhelezobetonnyye konstruksii: Obshchiy kurs: Uchebnik dlya vuzov* [Reinforced concrete structures: General course: A textbook for universities]. Moskva: Stroyizdat, 767 s. [in Russian].
 8. Pyskunov, N.S. (1963). *Dyfferentsyal'noe yntehral'noe yschyslenyya dlya vtuzov* [Differential and integral calculus for technical colleges]. Moskva, Fyzmathyz, 856 s. [in Russian].
 9. Smyrnov, A.F. (1975). *Soprotivlenye materyalov* [Strength of materials]. Uchebnyk dlya vuzov [Textbook for universities]. Moskva: Vysshaya shkola [High school], 480 s. [in Russian].
-